

Если определитель $d(\lambda_1)$ этой системы отличен от нуля, то величины A_k выражаются однозначно через параметры $B_1, \dots, B_v$. Подставляя определенные таким образом значения A_k в уравнения (39), получим систему вида

$$\sum_{k=1}^v C_{pk} B_k = r_k \quad (k=1, 2, \dots, v), \quad (40)$$

где C_{pk} и r_k — вполне определенные числа.

Если определитель $\delta(\lambda_1)$ системы (40) отличен от нуля, то величины B_k , а следовательно и A_k , определяются однозначно и потому формула (34) будет определять решение уравнения (1), зависящее только от n произвольных параметров $C_1, \dots, C_n$, входящих в структуру функции $h(x)$.

Отсюда следует, что задача Коши для уравнения (1) с произвольными начальными условиями (2) в этом случае имеет единственное решение. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 8. Пусть λ_1 есть собственное значение интегрального уравнения (32). Если определители $d(\lambda_1)$ и $\delta(\lambda_1)$ отличны от нуля, то задача Коши для уравнения (1) с произвольными начальными условиями (2) имеет единственное решение вида (34).

Замечание. Предыдущие результаты показывают, что одного интегрального уравнения (19) недостаточно для полного исследования решений уравнения (1) для случая, когда $m > n$. Помимо этого уравнения, надо учитывать еще решение системы линейных алгебраических уравнений (38). Спектр собственных значений для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения складывается, таким образом, из спектра собственных значений интегрального уравнения (32) и из суммы корней характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ системы (31). Отсюда следует, что спектр собственных значений интегро-дифференциального уравнения (10) есть дискретное множество без точек сгущения на конечном расстоянии.

Пример.

$$y' - y = x + \lambda \int_0^1 (ty + xty'') dt; \quad y(0) = 1. \quad (a)$$

Дифференцируя дважды уравнение (a), получим

$$y''' - y'' = 0,$$

откуда

$$y' - y = C_1 x + C_2. \quad (б)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из условий (16). В данном случае эти условия имеют вид

$$C_1 = 1 + \lambda \int_0^1 ty'' dt; \quad C_2 = \lambda \int_0^1 ty dt. \quad (в)$$

Решая уравнение (б), получим:

$$y = Ce^x - C_1(x + 1) - C_2.$$

Используя начальное условие $y(0) = 1$, будем иметь

$$y = (1 + C_1 + C_2)e^x - C_1(x + 1) - C_2. \quad (г)$$